# OTRA COSA ES CON GUITARRA......AFINADA

Adriana Rabino y Patricia Cuello
G.P.D.M.2006
San Carlos de Bariloche

En este trabajo se muestra la aplicación de algunos conceptos matemáticos a un problema musical: la afinación de los instrumentos.

Intuitivamente se tiende a contraponer matemática y música, dado que la primera es una ciencia exacta, y sus aficionados aparentan distar mucho de las producciones artísticas que nacen de la emoción, el gusto, el alma. Pareciera que se mezcla rigidez con flexibilidad, agua con aceite. Sin embargo, el hombre siempre se sintió atraído por los sonidos musicales, de timbre particularmente agradable, sugestivo y armónico. Paradójicamente, la armonía del universo se mantiene respetando reglas matemáticas. Entonces, no es casual encontrar fundamentos matemáticos en la producción musical.

Para comenzar, haremos referencia a algunos conceptos fundamentales que se utilizan en el desarrollo de esta propuesta y que son necesarios explicitar para la comprensión de la misma:

FRECUENCIA: cuando un objeto vibra, crea un sonido, que puede escucharse o no, todo depende de cuán ligero o despacio esté vibrando, lo que se denomina su *frecuencia*. En los instrumentos de cuerda el objeto que vibra es una cuerda (piano, guitarra, violín), en los de viento, como el saxofón o el clarinete, el objeto de vibración es una lengüeta que se pone en movimiento con el aire que se sopla, y en los de percusión es el parche el que vibra.

La frecuencia de vibración se mide en *ciclos por segundo*. Fue Pitágoras quién descubrió que la frecuencia de una cuerda que vibra depende de su largo. El *tono* depende exclusivamente del número de vibraciones por segundo (hertz). Cuando el número de vibraciones de una nota es exactamente el doble de las de otra ( la cuerda es la mitad de la otra), se dice que la primera está a una *octava* más alta con relación a ésta última.

En general nuestro oído es capaz de recibir sonidos en una amplia banda de frecuencias (de 16 a 20 000 hertz) ; hasta 4 000 hertz puede distinguir, en cualquier altura, sonidos que apenas difieren en una vibración por segundo.

La fórmula fundamental del número de vibraciones que da una cuerda es:

$$N = \frac{\sqrt{9{,}81.T}}{2.L.\sqrt{p}}$$

donde N = vibraciones dobles por segundo

T = tensión de la cuerda en kg

L = longitud de la cuerda en metros

P = peso en gramos por metro de cuerda

INTERVALO: Se llama así la razón que existe entre las frecuencias de dos notas consecutivas. Cuando el intervalo entre cada nota y la siguiente es el mismo, se dice que las notas están *afinadas* (ver tabla en el anexo).

ESCALA O GAMA MUSICAL: entre una nota y su octava, el oído reconoce otras notas cuyas frecuencias son bien definidas. Estas sucesivas notas forman la *escala* o *gama musical*.

¿Por qué es necesario crear una escala o gama musical? Las alturas de tonos conforman una variable continua, por lo tanto se necesitarían infinitos signos para designarlas a todas y nuestros oídos no podrían percibir la diferencia entre dos sonidos muy cercanos. Esto hace inútil el empleo de todas las frecuencias (lo cual también complicaría la escritura musical y la ejecución en los instrumentos). Esto ha obligado a no utilizar, con fines musicales, más que un número restringido de sonidos en una escala. De todas maneras, de un instrumento a otro esta restricción varía. A las notas de un piano las podríamos comparar con los elementos de un conjunto discreto sin posibilidad de tocar tonos intermedios. La guitarra presenta mayores posibilidades, aunque no tantas como el violín que no tiene trastes. En instrumentos como el violín o el violoncelo se puede obtener cualquier sonido (dentro de los límites de extensión del instrumento).

Entonces vemos que, de acuerdo a las necesidades técnicas, la escala musical debe contener un número relativamente pequeño de sonidos; queremos averiguar cuáles son precisamente los que deben ser incluidos en la escala.

La situación no es tan simple como, por ejemplo, en la construcción de una escala termométrica donde se marcan los puntos de congelamiento y ebullición del agua y el intervalo obtenido se divide en 100 partes iguales. En la música, desempeñan un enorme papel las consonancias, es decir emisiones simultáneas de varios sonidos de distinta altura. Pero (he aquí el problema) de ningún modo son consonantes todas las combinaciones de sonidos. Por eso en la escala musical se tratará de incluir, junto con un sonido dado, aquellos que al sonar con él, lo hagan de la forma más natural.

DIAPASÓN: Se llama *diapasón* al instrumento musical más sencillo que consta de una sola nota denominada LA normal ($La_4$), la que produce aproximadamente

440 vibraciones por segundo, (a los fines operativos se redondeó en este valor por convención).
TRASPOSICIÓN: si se cambia la nota inicial de una melodía, se puede construir una nueva melodía dando al oyente la impresión de estar oyendo la misma melodía inicial. Las frecuencias de las notas utilizadas en la nueva melodía son *proporcionales* a las frecuencias de las notas que componían la melodía primitiva. Se dice que la nueva melodía ha sido *traspuesta* con relación a la primera.
GAMA PITAGÓRICA: se dice que Pitágoras (S.V aC.) fue el inventor de esta gama, pero probablemente lo que hizo fue estudiar y perfeccionar la gama que lleva su nombre. En ella, la frecuencia de cada nota se logra multiplicando la frecuencia de la anterior por 3/2 (se limita a 7 notas, cifra admitida en aquella época por todos los músicos). Desde el punto de vista armónico, la escala es netamente defectuosa, resultando esta gama sumamente bondadosa desde el punto de vista melódico. Si se quiere trasponer por dificultad en la interpretación (por ejemplo de un cantante), la escala de Pitágoras resulta sumamente complicada desde el punto de vista práctico. Esta dificultad no afectó mayormente hasta fines de la Edad Media ya que la música era transmitida de generación en generación en forma oral (folklore) y se utilizaba poco la escritura musical. Recién en ese momento surgió la necesidad de perfeccionar la gama pitagórica.
GAMA DE ZARLINO: Zarlino (1517-1590) intentó salvar los inconvenientes de carácter armónico de la escala de Pitágoras, haciendo algunas modificaciones y creando así la *gama de Zarlino*, sin tener mucho éxito.
ESCALA CROMÁTICA BIEN TEMPERADA: si bien esta escala no es perfecta ni mucho menos, es algo más científica y tiene la gran ventaja de diferenciarse muy poco de las anteriores.
Fue J. S. Bach (1685-1750) quién demostró, con sus 48 preludios y fugas para el clave bien temperado, que con el uso del *temperamento igual* (todos tonos iguales entre sí) podían escribirse, interpretarse y escucharse fugas en todos los tonos. Es la escala más utilizada por los compositores occidentales desde hace dos siglos.
Esta escala consta de 12 semitonos completamente iguales de 25 *savarts* cada uno (savart es la unidad para medir la altura de un sonido. Una octava es igual a 300 savarts).
La escala cromática temperada tiene en música una enorme ventaja: resuelve el problema de la trasposición. En cambio no es perfecta ni desde el punto de vista melódico, ni desde el punto de vista armónico.

ESCALAS QUE SE UTILIZAN EN LA PRÁCTICA

Habíamos dicho que una escala está afinada cuando los intervalos tienen la misma razón de frecuencia. Ejemplifiquemos a partir de la escala de un piano (ver figura en el anexo). Ddebe verificarse que

$$\frac{do}{do^{\#}} = \frac{do^{\#}}{re} = \frac{re}{re^{\#}} = \frac{re^{\#}}{mi} = \frac{mi}{fa} = \frac{fa}{fa^{\#}} = \frac{fa^{\#}}{sol} = \frac{sol}{sol^{\#}} = \frac{sol^{\#}}{la} = \frac{la}{la^{\#}} = \frac{la^{\#}}{si} = \frac{si}{do_1}$$

donde do, $do^{\#}$, re, $re^{\#}$, mi, fa, $fa^{\#}$, sol, $sol^{\#}$, la, $la^{\#}$ y si representa el número de vibraciones de las notas *do, do sostenido, re, re sostenido, mi, fa, fa sostenido, sol, sol sostenido, la, la sostenido* y *si* respectivamente. *$do_1$* representa el número de vibraciones de la nota *do* de la octava más alta.

También sabemos que la razón $\frac{do}{do_1} = \frac{1}{2}$ ya que do está exactamente una octava más baja que $do_1$.

Entonces:

$$\frac{1}{do^{\#}} = \frac{do^{\#}}{re} = \frac{re}{re^{\#}} = \frac{re^{\#}}{mi} = \frac{mi}{fa} = \frac{fa}{fa^{\#}} = \frac{fa^{\#}}{sol} = \frac{sol}{sol^{\#}} = \frac{sol^{\#}}{la} = \frac{la}{la^{\#}} = \frac{la^{\#}}{si} = \frac{si}{2}$$

Haciendo unos sencillos cálculos obtendremos la razón del intervalo.

Si tomamos el primer y segundo términos se tiene $(do^{\#})^2 = re$

Tomando el primer y tercer términos se obtiene $(do^{\#})^3 = re^{\#}$, y así sucesivamente se llega a que $(do^{\#})^{11} = si$.

Ahora, considerando sólo los primeros y últimos términos se tiene:

$$\frac{do}{do^{\#}} = \frac{si}{do_1} \text{ ó } \frac{1}{do^{\#}} = \frac{(do^{\#})^{11}}{2} \Rightarrow (do^{\#})^{12} = 2 \quad \text{ó} \quad do^{\#} = \sqrt[12]{2} \cong 1{,}0594631$$

y la razón del intervalo es aproximadamente $\frac{1}{1{,}0595}$

Vemos que estas frecuencias forman una *progresión geométrica.*

Sabiendo que $La_4$ (La normal, determinado por convención como el sonido reconocido por el diapasón con 440 hertz o vibraciones por segundo aproximadamente) es la sexta nota de la tercera escala utilizada por los músicos, multiplicando a derecha y dividiendo a izquierda por $do^{\#} \cong 1{,}05946$, se obtiene la siguiente tabla de la gama bien temperada. En los libros de música aparece de esta manera:

| **Nota** | $Do_4$ | $Do^{\#}$ | $Re_4$ | $Re^{\#}$ | $Mi_4$ | $Fa_4$ | $Fa^{\#}$ | $Sol_4$ | $Sol^{\#}$ | **$La_4$** | $La^{\#}$ | $Si_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Vib.xseg** | 261,625 | 277,181 | 293,664 | 311,125 | 329,527 | 349,228 | 369,993 | 391,995 | 415,303 | **440** | 446,162 | 493,883 |

y que, desde el punto de vista matemático, es una aproximación de la siguiente tabla que surge de utilizar la razón de intervalo $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$:

| **Nota** | $Do_4$ | $Do^{\#}$ | $Re_4$ | $Re^{\#}$ | $Mi_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Vibr. por seg.** | $440.\sqrt[12]{2^{-9}}$ | $440.\sqrt[12]{2^{-8}}$ | $440.\sqrt[12]{2^{-7}}$ | $440.\sqrt[12]{2^{-6}}$ | $440.\sqrt[12]{2^{-5}}$ |

| $Fa_4$ | $Fa^{\#}$ | $Sol_4$ | $Sol^{\#}$ | **$La_4$** | $La^{\#}$ | $Si_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $440.\sqrt[12]{2^{-4}}$ | $440.\sqrt[12]{2^{-3}}$ | $440.\sqrt[12]{2^{-2}}$ | $440.\sqrt[12]{2^{-1}}$ | $440.\sqrt[12]{2^{0}}$ | $440.\sqrt[12]{2^{1}}$ | $440.\sqrt[12]{2^{2}}$ |

Generalizando, el número de vibraciones por segundo es:

$$V = 440.\sqrt[12]{2^n} \text{ con } n \in Z \text{ y } -33 \leq n \leq 86$$

Aplicando logaritmo a ambos miembros queda que

$$\log V = \log 440 + \frac{n.\log 2}{12}$$

y graficando esta función en papel semilogarítmico se obtiene una recta con pendiente (log2) : 12 y ordenada al origen log 440.

Algunas **conclusiones y consideraciones** a tener en cuenta en el transcurso de la implementación de esta propuesta:

* Resulta imposible tocar afinadamente por razones prácticas evidentes (desgaste de las cuerdas, cambio de la tensión de las mismas, cambio de la temperatura del aire para instrumentos de viento, etc.)

* Resulta imposible oír afinadamente (papel esencial del acostumbramiento del oído).

* Resulta imposible una afinación absoluta (desde el punto de vista matemático), considerando que la razón del intervalo es un número irracional.

* Hasta puede afirmarse que, en una orquesta, cada ejecutante toca de acuerdo con su propia escala pero que el oído no se siente molesto por ello.

**¿Cómo utilizar este material en el aula?**

A través de la situación planteada anteriormente se pueden trabajar contenidos de diferentes niveles.
En segundo año del nivel medio puede utilizarse para darle sentido a las proporciones continuas en una problemática interesante, y calcular los intervalos aprovechando el uso de redondeo, aproximación, truncamiento, error.
En tercer año se puede ver la utilidad de introducir los números irracionales a través de este problema, profundizando este concepto con la siguiente pregunta: "¿Es posible afinar con exactitud un instrumento?". A partir de las reflexiones de los alumnos, en la socialización de las producciones, se pueden deducir las características de los números irracionales, la conveniencia de su expresión radical, la relación con los segmentos inconmensurables, etc.
En cuarto año de nivel medio es un atractivo problema para generar una función exponencial y aplicar las propiedades de los logaritmos para simplificar cálculos. También en este nivel se pueden trabajar las progresiones geométricas.

Es importante la búsqueda de situaciones problemáticas en las que los alumnos establezcan relaciones interdisciplinarias y de distintas áreas. El docente debe ser el artífice para que esto sea aprovechado, generando entusiasmo y motivación en los estudiantes.

**BIBLIOGRAFÍA**

BLANXART, D. : "*Teoría física de la música*", Bosch( Barcelona)
COMBARIEU. J. (1945) :"*La música sus leyes y su evolución*", Ed. Cronos.

INSTITUTO PARRAMÓN (1980): "*El libro de la música*", Edit. Barcelona.
MATRAS, J.J. (1988):"*El sonido*", Ed. Orbis S.A. (Bs.As.).
PAHLEN, K. (1949) : "*Síntesis del saber musical*",. EMECE Edit.
SHILOV, G.E. (marzo 1968): *"Construcción de la escala musical",* Revista Ciencia e Investigación.
TIRSO DE OLAZABAL (1979): "*Acústica musical y organología*", Ricordi Edit.
TRANCHEFORT. F. (1985): "*Los instrumentos musicales del mundo*", Edit. Alianza música.