III Congreso Nacional de Matemática y Problemáticas de la Educación Contemporánea

La Educación Matemática Realista

Bases teóricas

Profs. Ana María Bressan y

María Fernanda Gallego[1]

Santa María, Prov. de Catamarca. Argentina

18 al 20 de Octubre de 2011.

[1] Ambas son coordinadoras del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Consultar www.gpdmatematica.org.ar

La Educación Matemática Realista

La corriente conocida internacionalmente como Educación Matemática Realista (EMR), reconoce como fundador a Hans Freudenthal (1905-1990) - matemático y educador alemán que realizó la mayor parte de su trabajo en Holanda.

Esta corriente didáctica nace en los años 60, como reacción al enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética que se sustentaba en ese país y a la aplicación en las aulas de la "matemática moderna" o "conjuntista".

Vamos a encontrar que muchas de sus ideas originales se encuentran hoy adoptadas y discutidas en las teorías didácticas actuales y han servido de base a currículos de otros países como EEUU, Japón, Indonesia, Gran Bretaña, Alemania, Dinamarca, España, Portugal, Sudáfrica, Brasil, Puerto Rico, etc.

Una idea central, sino la más importante de la EMR, es que la enseñanza de la matemática debe estar conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en orden a constituirse en un valor humano.

> *"La imagen de la matemática se enmarca dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la de la sociedad." (Freudenthal, 1991, 32).*

Para Freudenthal, una preocupación esencial frente a la realidad educativa y académica de su época era:

> *"Hay una cosa que necesitamos [decidir] urgentemente, si la imagen de la matemática es para una élite o para todos – una imagen de la matemática para la totalidad de la educación." (1973, 63)*

Para él lo que importa es que todos los alumnos tengan alguna forma de contacto con el *quehacer matemático,* considerado éste como una actividad estructurante u organizadora de matematización que está al alcance de todos los seres humanos (Freudenthal, 1973, 1991) y define esta actividad como:

> "*Matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos… incluida la matemática misma." (1973; 44).*

Matematizar es un proceso que involucra:

- ***reconocer* características esenciales** en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos;
- ***descubrir* características comunes**, similitudes, analogías e isomorfismos;
- ***ejemplificar* ideas generales**;
- ***encarar* situaciones problemáticas** de manera paradigmática;
- ***la irrupción repentina*** de **nuevos objetos mentales y operaciones;**
- ***buscar* atajos** y ***abreviar* estrategias y simbolizaciones** iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas; y
- ***reflexionar*** acerca de la actividad matematizadora, considerando los fenómenos en cuestión

desde **diferentes perspectivas** (1991, 30, 35-36).

Los principios de la Educación Matemática Realista

Los principios en que se basa la Educación Matemática Realista son:

P1: Partir de **contextos**[2] **y situaciones problemáticas realistas**[3] (en el sentido de representables, razonables, imaginables para los alumnos) como generadores de la actividad matematizadora de los estudiantes.

Según Freudenthal (1973, 1991), dado que en gran parte la matemática surge históricamente como herramienta para matematizar situaciones del entorno natural y social, su enseñanza debe basarse también en la organización de este tipo de situaciones. Esto no significa restringirse a fenómenos del mundo real (perceptual), dado que esto limitaría las oportunidades para que los alumnos aprendan a operar dentro de la matemática misma. Se trata de que los alumnos, quienes al principio no poseen herramientas matemáticas suficientes, las reinventen a partir de abordar problemas presentados en contextos y situaciones realistas.

> ***"****Un contexto es un evento, una proposición o situación derivada de la realidad, la cual es significativa para los alumnos o la pueden imaginar y conduce a usar métodos matemáticos desde su propia experiencia. Provee significado concreto y apoyo para las relaciones y operaciones relevantes de la matemática. Las situaciones podrían ser tomadas desde experiencias cotidianas, tales como los recorridos del colectivo o las compras y el manejo del dinero. Además de los contextos derivados de la vida experiencia diaria, los contextos pueden encontrarse en la matemática misma – el mundo de problemas con números puros y las relaciones numéricas, tales como el contexto de los números primos*". (van den Heuvel-Panhuizen, 1994. Pág. 243)

Dentro de esta corriente, los contextos realistas cumplen un papel esencial en el aprendizaje matemático de los alumnos, en tanto:

- ✓ son puntos de partida en el proceso de enseñanza y aprendizaje para producir matemática y dominios de aplicación de la misma.
- ✓ bien buscados, resultan de interés para los alumnos.
- ✓ se constituyen en objetos de trabajo, tornando accesible el contenido matemático y permiten que los estudiantes trabajen en diferentes niveles de conceptualización en base a sus posibilidades.

---

[2] **Contexto** significa para la EMR ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado (1991; 73). **"**Un contexto es un evento, una proposición o situación derivada de la realidad, la cual es significativa para los alumnos o la pueden imaginar y conduce a usar métodos matemáticos desde su propia experiencia. Existen distintos tipos de contextos: reales, artificiales (fantasía), matemáticos, virtuales (que nacen de la realidad pero contiene elementos no reales en sí mismos, con el objetivo de simplificar y simulan situaciones) (Dekker y otros, 2001).

[3] Es importante enfatizar que el significado del término *realista* en esta corriente proviene del holandés, *zich realis-eren* y significa imaginar; o sea, ***una situación es realista si se presenta ante el sujeto que aprende como razonable, realizable o susceptible de ser imaginada*** (Freudenthal, 1991; van den Heuvel-Panhuizen, 1996, Streefland, 1991).

- ✓ promueven el uso del sentido común y movilizan los conocimientos informales de los alumnos y la creación de modelos.
- ✓ son abiertos (permiten estrategias variadas y/o varias soluciones) dando lugar a valiosas discusiones matemáticas entre los alumnos.
- ✓ se usan en profundidad. (Zolkower, Bressan, Gallego, 2006, pp 11-33)

Sin embargo, para no generalizar y banalizar el concepto de contexto realista es importante tener en cuenta el carácter relativo del mismo -el que un contexto sea o no realista depende de la experiencia previa de los alumnos y/o de su capacidad para imaginarlo o visualizarlo.

P2. Utilización de los **modelos** (materiales, lingüísticos, esquemas, diagramas y símbolos) que emergen de la propia actividad matemática de los alumnos como herramientas para representar y organizar estos contextos y situaciones.

> *"El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal."* (Freudenthal, 1991, p. 34)

Cabe aclarar que desde la perspectiva de la EMR el término modelo no se refiere a modelos preconstituidos e impuestos desde la matemática formal, sino de modelos emergentes o in statu nascendi. Durante las trayectorias de aprendizaje/enseñanza, las cuales por lo general giran en torno a preguntas que surgen de situaciones problemáticas, los alumnos se abocan a actividades organizadoras y reorganizadoras de las cuales surgen los modelos. Si bien, en un principio, estos están estrechamente ligados a los contextos y situaciones de los que emergen, poco a poco se van despegando de la situación particular hasta adquirir el carácter de modelos formales y generales y, por lo tanto generalizables y aplicables a otros contextos y situaciones, pasando así de **"modelo de"** relativo a una situación particular, a **"modelo para"** razonar matemáticamente en situaciones variadas de fuera y dentro de la matemática misma.

Los modelos en la EMR no solo son pensados como representaciones sino también como objetos de trabajo y reflexión en sí mismos, sobre los cuales se realizan acciones y operaciones y se visualizan, explican, comparan, contrastan, comprueban relaciones. Para ello, estos modelos deben satisfacer varias condiciones importantes.

- **Estar enraizados en contextos realistas,** imaginables.[4]
- **Tener suficiente flexibilidad para ser aplicados en un nivel más avanzado o más general.** Cambian con el tiempo (en la didáctica tradicional son fijos). Esto implica que el modelo debería apoyar la progresión en la matematización vertical sin bloquear la posibilidad de volver a los recursos desde los cuales una estrategia se origina… Es decir, los estudiantes siempre deberían poder volver a niveles más bajos, justamente lo que torna a los modelos muy poderosos.
- Ser **viables.** Los modelos deberían comportarse en una manera natural, autoevidente. Ellos deberían ajustarse a las estrategias informales de los alumnos, como si los propios alumnos los pudieran haber re-inventado, y ser fácilmente adaptados a otras situaciones.

[4] En la EMR se habla de modelos emergentes: no vienen de la matemática formal, no son impuestos, nacen de la actividad informal de los alumnos o de la historia de la matemática.

La búsqueda de contextos y modelos que den lugar de modo más o menos natural a la matematización corresponde a lo que Freudenthal denomina *fenomenología didáctica.* (1983). La *fenomenología didáctica* se nutre de la *historia de la matemática* (Streefland, 1991b) y de las *producciones y construcciones* de los alumnos que van surgiendo durante el proceso de instrucción (Streefland, 1991).

La fenomenología didáctica es un método que consiste en investigar primero las diversas manifestaciones y usos de un determinado objeto matemático **en la realidad,** por ejemplo: las fracciones, las razones, las funciones, las proporciones, los ángulos[5], como fenómenos en la vida real, considerando sus referencias en el lenguaje cotidiano (lo que decimos cuando hablamos de razones, fracciones, funciones, etc.) y, a partir de esto, construir la didáctica de ese tema.

Entre los modelos que la propia EMR ha probado en las aulas de educación primaria y que destaca como fácilmente introducibles a partir de situaciones contextuales y recreables por los alumnos se encuentran: materiales didácticos manipulables: contadores, el dinero, collares de bolitas bicolor estructurado de diez en diez (Treffers, 1991); situaciones paradigmáticas: el colectivo (van den Brink, 1984), el restaurante de los panqueques (Streefland, 1991a), la reunión de padres, la fábrica de caramelos en paquetes de 10 unidades (Gravemeijer, 1994); esquemas: el modelo circular, la barra doble o de porcentajes, la tabla de razones (Middleton y otros, 1995; Middleton y otros, 1998, van den Panhuizen-Panhuizen, 2003); diagramas: diagrama de árbol; modalidades de notación: el lenguaje de flechas, la notación de libreta y la tabla de combinaciones para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (Reeuwijk, 1997); y procedimientos volcados simbólicamente como los algoritmos en columnas o las fórmulas (Treffers, 1987).

Como se mencionara, es central la atención que se debe poner a las **soluciones informales y las producciones libres**[6] de los alumnos como puntos de partida en el proceso de enseñanza /aprendizaje ya que su trabajo con problemas que pueden resolverse de distintas maneras

> *"… puede traer a la luz los niveles de comprensión y habilidades de cálculo que estos poseen en un determinado momento. Esta información es importante no solo para tomar decisiones micro-didácticas sino también como guía para decisiones macro-didácticas. Un corte transversal de la clase (de los niveles diferentes de comprensión de los alumnos en un momento particular) muestra, al mismo tiempo, una sección longitudinal de una trayectoria de aprendizaje/enseñanza o una parte de ésta. Las estrategias de solución de alumnos individuales revelan colectivamente elementos esenciales del camino a largo plazo que los alumnos deberán recorrer. Lo que aparece en la clase en el presente anticipa lo que está en el horizonte y más allá." (van den Heuvel-Panhuizen, 2005, p. 38)*

[5] "Mirar los ángulos desde una perspectiva fenomenológica revela varios aspectos. Los ángulos pueden ser tangibles, como los ángulos rectos de una mesa. Pero también imaginarios, por ejemplo si nosotros pensamos en el ángulo entre un rayo de sol y el suelo. Además, los ángulos pueden ser estáticos o dinámicos, como en "un giro de 90º". Los ángulos pueden ser usados para indicar dirección, como en la brújula. Y finalmente los ángulos son usados para indicar una posición en un sistema de coordenadas, como en el sistema de latitud-longitud" (Gravemeijer K., Taking a different perspectiva. www.if.uu.ut.)

[6] Luego de ser introducidos a un cierto tipo de problemas contextuales se le pide a los alumnos que generen problemas, similares, busquen información, saquen conclusiones, preparen una prueba para sus pares, etc. Esto es beneficioso porque estas actividades le demandan reflexión sobre la actividad precedente llevando a la conciencia lo que estaba en acción. También son útiles para el docente porque le permiten notar estrategias informales, notaciones y qué puede ser usado en la secuencia de aprendizaje.

P4. Reconocer el papel clave del **docente como guía** y organizador de la **interacción** en las aulas.

La *enseñanza* de la matemática debe tomar en la EMR la forma de ***reinvención guiada*** (Freudenthal, 1991), o sea, un proceso en el que los alumnos re-inventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas, en interacción con sus pares y bajo la guía del docente. La negociación explícita, intervención, discusión, cooperación y evaluación son elementos esenciales en un proceso constructivo de aprendizaje en el cual los métodos informales son usados como base para el logro de los formales. En esta enseñanza interactiva los estudiantes son convocados a explicar, justificar, acordar o disentir, cuestionar alternativas y reflexionar sobre ellas.

El docente posee un papel bien definido en tanto sujeto que media entre los alumnos y las situaciones problemáticas en juego, entre los alumnos entre sí, entre las producciones informales de los estudiantes y las herramientas formales, ya institucionalizadas, de la matemática como disciplina.

P5. El aprendizaje de la matemática es considerado como una **actividad social** donde la reflexión colectiva lleva a niveles de comprensión más altos.

Las **interacciones sociales verticales** (docente-alumno) y **horizontales (**alumno-alumno) ocupan un lugar central, siendo clave el modo en que el docente maneja estos eventos con miras a maximizar oportunidades para la producción, el intercambio y la apropiación de ideas por parte de los alumnos (Dekker and Elshout-Mohr, 2004; Elbers, 2003; Zolkower y Shreyar, 2002, 2006). No se piensa en una clase homogénea en sus trayectos de aprendizaje, sino en individuos que siguen senderos propios. Sin embargo, esto no lleva a partir la clase en grupos con procesos similares, sino más bien a mantener la clase general junta como una unidad de organización o al trabajo co-operativo en grupos heterogéneos, lo que fue defendido por Freudenthal desde los años 45 (Freudenthal 1983,1991). Dado que los problemas se seleccionan de manera que den lugar a soluciones apelando a diferentes niveles de comprensión, todos los alumnos pueden trabajar en ellos.

P6. La fuerte **interrelación e integración** de los ejes o unidades curriculares de la matemática.

La resolución de situaciones problemáticas realistas a menudo exige establecer conexiones y la aplicación de un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas. La EMR no hace profundas distinciones entre los ejes curriculares, lo cual da una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles disferentes modos de matematizar las situaciones bajo distintos modelos y lenguajes, logrando alta coherencia a través del currículo (de Lange, 1996, Gravemeijer, 1994).

Una de las razones es que aplicar la matemática es muy dificultoso si cada eje es enseñado aisladamente, negando las conexiones que los cruzan ya que en las aplicaciones, usualmente, se necesita más que solo la aritmética, o el álgebra o sola la geometría para solucionar un problema.

El pasaje del conocimiento informal al formal

El objetivo de Freudenthal y sus colaboradores fue estudiar cómo pasa el alumno del conocimiento informal, al preformal y de allí al formal, y cómo ayudarlo en ese pasaje.

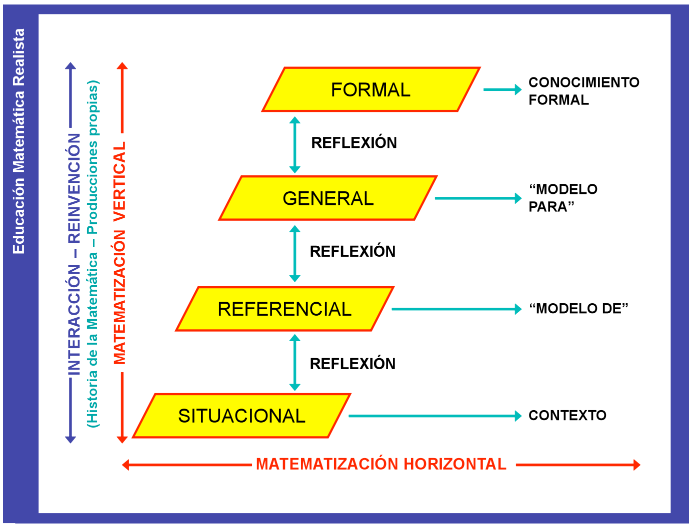
Coherente con su búsqueda de una matemática accesible a todos, sus aportes principales están referidos a facilitar el encuentro entre la organización matemática de situaciones cotidianas y la matemática formal, profundizando en el proceso de matematización y en la formulación de secuencias didácticas adaptables a diversas aulas (en concordancia con pensar la matemática como accesible a todos), estructurando clases en base a la multiplicidad de los usos de los saberes a enseñar y a los diversos modos de apropiación de los mismos por parte de los alumnos.

En este proceso de **matematización progresiva** la EMR admite que los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión, caracterizados por distintos tipos de actividades mentales y lingüísticas.

Una síntesis de este proceso queda expresada en el siguiente cuadro de niveles de matematización cuyo pasaje está favorecido por la reflexión sobre los logros del nivel anterior:

> *(…) "La evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel (Freudenthal, 1971:417).*

Cuadro 1: **Niveles de matematización**



En este proceso de matematización progresiva la EMR admite que los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión. Estos niveles (Freudenthal, 1973, 1991; Gravemeijer, 2004; 1994) son: <u>situacional, referencial, general y formal</u> y están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva, no constituyendo una jerarquía estrictamente ordenada.

- En el <u>nivel situacional</u> se da la interpretación de la situación problemática y el uso de estrategias ligadas totalmente al contexto de la situación misma. Apoyándose los estudiantes, en sus conocimientos informales, su sentido común y su experiencia, pueden. identificar y describir la matemática que yace en el contexto, visualizar, esquematizar y formular el problema de diferentes formas, descubrir relaciones y regularidades, reconocer analogías con otros problemas, etc.. A este proceso se lo denomina "**matematización horizontal**".

Los restantes niveles corresponden a la "**matematización vertical**", caracterizada por el "ajuste" de modelos, el uso de diferentes modelos matemáticos, la búsqueda de fórmulas, el uso de la prueba matemática y la generalización.

- El <u>nivel referencial</u> es donde aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, y las descripciones, conceptos y procedimientos personales que esquematizan el problema. De allí que los modelos se consideren como ***modelos de*** en tanto están referidos a las situaciones particulares que les dieron origen.
- El <u>nivel general</u> se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto. En este nivel, por la reflexión sobre los conceptos, procedimientos, estrategias y modelos utilizados en el nivel anterior surgen aspectos generalizables[7] de los mismos y los alumnos puede concluir que son utilizables en conjuntos de problemas, dando lugar a los ***modelos para*** la resolución de los mismos.

- En el nivel formal, se comprenden y se actúa con los conceptos, procedimientos y notaciones convencionales, propios de la rama de la matemática con que se está trabajando.

Estos niveles son dinámicos y un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido. Más que describir en forma exacta qué puede hacer el alumno en cada uno, sirven para seguir sus procesos globales de aprendizaje.

Freudenthal (1991) expresa: *"La matematización horizontal implica ir del mundo real al mundo de los símbolos, mientras que la matematización vertical significa moverse en el mundo de los símbolos",* pero aclara que la diferencia entre estos dos tipos de matematización no siempre está claramente delimitada.

La idea es que los alumnos puedan revertir de un nivel a otro siempre que lo necesiten, en tanto ninguno está totalmente separado ya que los de mayor nivel incorporan los conocimientos de los niveles inferiores.

> "*Comenzando desde la realidad, los alumnos pueden cruzar la frontera a la matemática por sí mismos, aprendiendo a estructurar, organizar, simbolizar, visualizar, esquematizar y mucho más. En resumen, estructurando el proceso de matematización horizontal por sí mismos. Pero también, sea simultánea o posteriormente, ellos pueden progresar en su tratamiento del material matemático dentro de la matemática misma, incrementando su eficiencia de procedimientos, aplicación de abreviaturas, reemplazando el lenguaje relativo a la propia lengua por el lenguaje convencional de*

[7] Generalizar implica para Freudenthal un concepto distinto de transferir. Cuando se habla de generalizar en la EMR no se entiende como la aplicación de un procedimiento conocido a situaciones nuevas (esto sería aplicar o transferir según su característica de novedad para el alumno) sino que implica conectar varias situaciones reconociendo características similares que permiten que se las clasifique dentro de un determinado tipo. Al mismo tiempo el proceso de solución (abarcativo) puede ser estructurado y por lo tanto la generalización toma forma de una actividad de organización, como una forma de matematización (Gravemeijer, 1994:104)

símbolos y variables, en otras palabras, por abstraer, generalizar, unificar y cuando es necesario especificar…" (Streefland, 1991, pág.19).

La didáctica desde la EMR

Si la actividad primordial de los alumnos es matematizar, ¿cuál es la actividad primordial de los profesores? Según Freudenthal (1991) es la de *didactizar*, entendida también ésta como una actividad organizadora que se da tanto a nivel horizontal como a nivel vertical. Horizontalmente, los docentes trabajan en torno a fenómenos de enseñanza-aprendizaje que emergen en sus aulas y en las de otros; verticalmente, reflexionan y generalizan a partir de estas situaciones hasta reinventar su propia caja de herramientas didácticas para facilitar la matematización.

> "*La didáctica de una disciplina significa la organización de los procesos de enseñanza-aprendizaje relevantes a esa área… Nuestra visión de la didáctica reflejará lo dicho sobre la matemática… la matemática surgiendo de la matematización es espejada por la didáctica surgiendo de la didactización. Nótese que el paralelismo intentado aun se extiende a distinguir la didactización horizontal y vertical: Desde la realidad didáctica para tornarse consciente de ella por un lado y para paradigmatizar por el otro."* (Freudenthal, 1991, p. 45)

La didáctica para Freudenthal no lleva solo a la transmisión del conocimiento sino también al desarrollo de conocimientos, normas y valores asociados con ser un "buen ciudadano", lo que lo aleja de una mirada netamente vocacional, instrumental o profesional de la educación, donde la didáctica prioritariamente atiende a teorías de propósitos y contenidos de instrucción. Para él el término currículo significa *proceso*, no una norma preestablecida, y su expresión la constituyen los desarrollos *educativos* (no dice curriculares), que no son elaboraciones de "académicos" y no se restringen a diseños curriculares, sino que son diseños estratégicos fundados que incluyen una filosofía educativa explícita e incorporan toda clase de materiales, a partir de la práctica en las escuelas, buscando "*fomentar un cambio en la marcha de la enseñanza actual de la clase"* (Gravemeijer y Tewuel, 2000)

La reflexión cumple un papel relevante en el pasaje de niveles (tanto en la matematización como en la didáctización) y está pensada como un proceso mental de estructurar o re-estructurar una experiencia, un problema o un conocimiento existente o intuido.

En la formación o capacitación docente, esta reflexión debería ser asistida de modo que los docentes pasen por el análisis sobre sus conocimientos, procesos de pensamiento, propósitos y sentimientos propios, en situaciones de interacción con sus compañeros, para luego ampliar sus reflexiones sobre lo que ocurre a otros compañeros incluyendo sus pensamiento y sentimientos en situación de interacción pasando gradualmente a analizar la interacción con alumnos en la clase. El objetivo es que el estudiante/capacitando aprenda a proceder en un modelo en espiral sin la ayuda del supervisor y a tornarse independiente, capaz de reflexionar sobre sus propios procesos de aprendizaje matemáticos y didácticos. (Wubbels T. y otros, 1997, p 31)

Referencias bibliográficas:

Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, F. (2004). "Los principios de la educación matemática realista." En *Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática*. Compilador: Alagia, H. y otros. Editorial Libros del Zorzal, Buenos Aires, Argentina.

Bressan, A, Zolkower, B., (2006) "Enseñando a didactizar, aprendiendo a matematizar: Ideas y experiencias en torno a la capacitación de docentes". Conferencia. Reunión de Educación Matemática (REM), Bahía Blanca.

De Lange, J. de (1996). Using and Applying Mathematics in Education. in: A.J. Bishop, et al. (eds). 1996. *International handbook of mathematics education, Part one. 49-97*.

Dekker R. y Elshout-Mohr M. (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics* **56:** 39–65, 2004. © 2004 *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*

Elbers, E. (2003), "Classroom interaction as reflection: Learning and teaching mathematics in a community of inquiry". *Educational Studies in Mathematics 54, 77-99.*

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel Publishing Co.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer, Dordrecht.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education 25(5),*443-471.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers J. & Whitenack J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.). *Communicating and Symbolizing in Mathematics* (pp.225-273) Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum.

Gravemeijer, K. (2004). Creating opportunities for students to reinvent mathematics. *Ponencia en la reunión de la ICME 10.* Associates.

Gravemejer, K.& Terwel, J.(2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies 32(6)*, 777-796.

Middleton, J. and van den Heuvel-Panhuizen, M. (1995). "The ratio table." *Mathematics Teaching in the Middle School* (January-March): 282-288.

Middleton, J. *et al*. (1998). "Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number." *MTMS* 3(4): 302-12.

National Center for Research in Mathematical Sciences Education & Instituto Freudenthal. (1998), *Mathematics in Context: A Connected Curriculum for Grades 5-8*. Chicago, Ill: Enciclopedia Britannica.

Streefland, L. (1991), *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Kluwer. Dordrecht. The Netherlands.

Streefland L. (1991). Realistic Mathematics Education in Primary School. Utrecht. CD-b Press. IF Utrecht University.

Streefland, L. (2003). Learning from history for teaching in the future. *Educational Studies in Mathematics 54*, 37- 62.

van Reeuwijk, M. (1995), "The role of realistic situations in developing tools for solving systems of equations," Utrecht University: Instituto Freudenthal (www.fi.uu.nl).

Reeuwijk, M. and Wijers, M. (1997). "Students' construction of formulas in context." *MTMS* (2)4: 230-6.

Treffers, A. (1987). *Didactical background on a mathematics program for primary education*. Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. (1991). "Realistic Mathematics Education in the Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (ed), Realistic Mathematics Education in Primary School. Utrecht. CD-b Press. IF Utrecht University.

Treffers, A. (1993). "Wiskobas and Freudenthal--Realistic mathematics education." *ESM* 25: 89-108.

van den Brink F. J. (1984). *Números en marcos contextuales.* Educational Studies in Mathematics 15. Págs. 239-257. 1984. Traducción: Gallego F. y Collado Ma. E.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (1994). "The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage". *Educational Studies in Mathematics* 54: 9-35. (Ver traducción: www.gpdmatematica.org.ar)

van den Heuvel-Panhuizen, M., (2005). Can scientific research answer the 'what' question of mathematics education? *Cambridge Journal of Education* 35(1), Marzo, pp. 35–53.

Wubbels t y otros (1997): *Preparing Teachers for Realistic Mathematics Education*. ESM 32.29-47

Wubbels, T. et al…… "Preparing teachers for realistic mathematics education.' *ESM*…

Zolkower, B. y Shreyar, S. (2002): Interaction and semiotic apprenticeship in a 6th grade mathematics classroom. En los *Proceedings of the 20th PANAMA Conference*, Holanda, 141-162.

Zolkower, B. y Shreyar, S. (2006): A teacher's mediation of a thinking aloud discussion in a 6th grade mathematics classroom. Manuscrito aceptado para publicación en la revista *Educational Studies in Mathematics*.

Zolkower, B., Bressan, A. Y Gallego, Ma. F. (2006). "La corriente realista de didáctica de la matemática: experiencias de aula de profesores y capacitadores". *Yupana. Rev de Educación Matemática.* (ISSN 1668 7035) de la Universidad Nacional del Litoral. (Nº 3-06, pp 11-33)

Zolkower, B., Bressan, A. (2012). Educación Matemática Realista en Pochul, M., Rodriguez, M. (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Villa María:Eduvim; Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento.