

APROVECHANDO LOS FRACTALES EN LA ENSEÑANZA

CONTENIDOS: FUNCIÓN EXPONENCIAL – RELACIÓN PERÍMETRO ÁREA – CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS Y OTROS.

AUTORAS: PATRICIA CUELLO-ADRIANA RABINO

En un curso introductorio al I.F.D.C. de Bariloche, dimos un problema clásico. Se trataba de calcular el área y el perímetro del Lago Nahuel Huapi con unidades no convencionales. Les dábamos a los alumnos hilos, porotos, arroz o lo que quisieran (algunos hacían una cuadrícula) y un mapa del lago con la correspondiente escala.

En la planificación de esta tarea, un colega nos dijo que esto “era imposible de hacer de esta manera porque se trataba de un fractal”. El profesor nos dio algunas explicaciones del tema con lo cual nos pareció que el asunto era difícil. Decidimos seguir adelante con el plan y, sin desprestigiar esta interesante explicación, convenimos en que lo que se les pedía a los alumnos era un cálculo aproximado.

Si bien el estudio de los fractales es una teoría muy compleja, se pueden aprovechar algunos conceptos de una manera sencilla para la enseñanza de algunos contenidos.

En principio presentaremos una definición extraída de Wikipedia:

*Un **fractal** es un objeto semigeométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot ¹en 1975 y deriva del Latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal.*

Los matemáticos le adjudican a los fractales propiedades bastante complicadas. Ellos dicen que a un objeto geométrico fractal se le atribuyen las siguientes características:

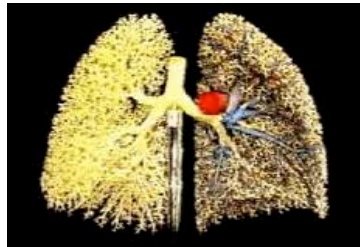
- *Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.*
- *Posee detalle a cualquier escala de observación.*
- *Es autosimilar (exacta, aproximada o estadística).*
- *Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.*
- *Se define mediante un simple algoritmo recursivo.*

Pero para nuestros fines vamos a limitarnos a un concepto más intuitivo. Vamos a pensar en objetos irregulares que son **autosimilares** cuando se observan a diferentes escalas. Esto quiere decir que una pequeña parte del objeto luce como el objeto entero. Por ejemplo la costa de un mar mirado desde un satélite presenta un perfil irregular, y a medida que nos acercamos sigue siendo similar. Si nos acercamos mucho terminaremos viendo piedritas o granitos de arena que siguen siendo irregulares pero nos recuerdan la costa inicial. Lo mismo ocurre con una nube, con los pulmones, con un copo de nieve, con el sistema venoso, con una coliflor o con un brócoli.

¹ Mandelbrot B., nacido en Varsovia, Polonia el 20 de noviembre de 1924, acaba de morir en Cambridge, EE. UU, el 14 de octubre de 2010

Por otro lado no alcanza con una sola de aquellas características para definir un fractal. Por ejemplo, la recta real no se considera un fractal, pues a pesar de ser un objeto autosimilar carece del resto de características exigidas.

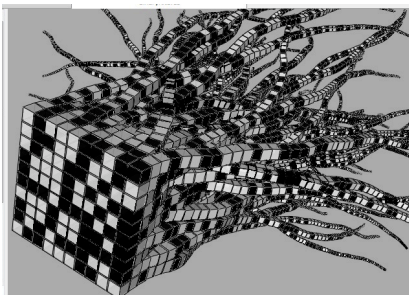
Un **fractal natural** es un elemento de la naturaleza que puede ser descrito mediante la geometría fractal. Esta representación es aproximada, pues las propiedades atribuidas a los objetos fractales ideales, como el detalle infinito, tienen límites en el mundo natural.



El estudio de los fractales ha permitido interpretar muchos fenómenos de la naturaleza estudiados en otras disciplinas (formas de las nubes, distribución de galaxias, formas de las costas oceánicas, dinámicas de las burbujas, estructuras, ramas de los árboles, etc.) , tanto como han enriquecido la matemática misma (curvas de Peano, circunferencia de Apolonio, función de Cantor, etc.), siendo la computadora un instrumento facilitador prioritario para el conocimiento de esta rama del quehacer matemático.

¿Se puede imaginar ahora que una planta de coliflor o de brócoli posee las propiedades de un fractal? Una condición importante de ellos es que cualquier parte del entero guarda similitud con el entero total.

(Extraído de “Razones para enseñar geometría en la educación básica”, de Ana Bressan y otros (Ed. Novedades Educativas. 2000.).

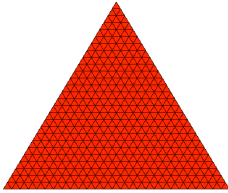
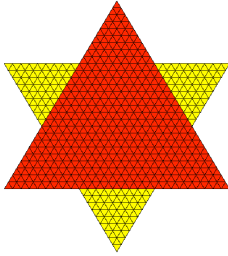
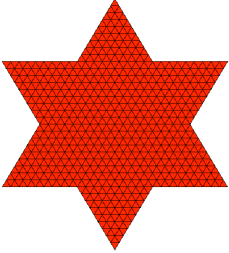
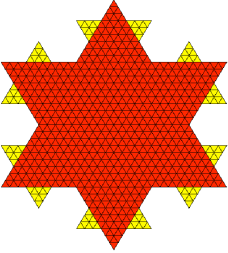
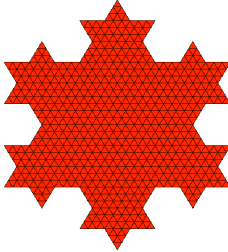
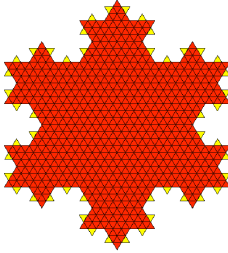
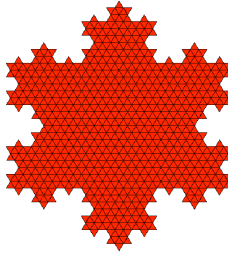


¿Y si hacemos volar nuestra imaginación e inventamos **fractales no naturales**? Puede ser divertido, no? Por ejemplo la *reproducción de la mano o el pulpo cúbico*



COPOS DE NIEVE

Volviendo a la realidad, un ejemplo clásico de fractal está dado por la curva *copo de nieve*. Para generar la secuencia del “copo de nieve”, se parte de un triángulo equilátero en el cual hay que dividir en tres partes iguales cada uno de sus lados, y construir otros triángulos equiláteros más pequeños en el tercio central de cada lado (hacia fuera).

	NIVEL 0	TRANSICIÓN DEL NIVEL 0 AL NIVEL 1	NIVEL 1
			
TRANSICIÓN DEL NIVEL 1 AL NIVEL 2	NIVEL 2	TRANSICIÓN DEL NIVEL 2 AL NIVEL 3	NIVEL 2
			



Los “anticopos de nieve” se producen en forma análoga, pero poniendo hacia adentro los triángulos de cada tercio central del lado.

¿Qué actividades se pueden hacer con los alumnos y hasta dónde se puede aprovechar esta creación de la naturaleza en contenidos matemáticos?

Proponemos algunas de ellas:

- I) Dibujar el copo y el anticopo de nieve a partir de un triángulo equilátero (**construcción de figuras geométricas**).
- II) Calcular perímetro y área de los distintos “cristales” que se van formando en cada paso. ¿Qué pasa con el perímetro? ¿Y con el área? (Se puede conjeturar que el perímetro crece infinitamente sin embargo el área casi permanece constante. Esta idea se ve reflejada en cuanto el perímetro crece rápidamente pero el cristal “no se va” de la hoja de papel donde está dibujada. Es un lindo ejemplo para que los alumnos vean la **no proporcionalidad entre perímetro y área de figuras**). Se recomienda trabajar con el copo y no con el anticopo por las limitaciones físicas.
- III) Si se trabaja en el aula con algún **software de geometría** (por ejemplo Cabrí, Geogebra u otro), está la posibilidad de que los alumnos creen “subprogramas” dentro del programa (una macro). En este sentido, pueden armar un programa en donde, dado un triángulo equilátero, construya triángulos equiláteros en el tercio central de cada lado. De esta forma va construyendo el cristal.
- IV) Después de dibujar los 3 primeros pasos de la generación del cristal a partir del triángulo equilátero, que los alumnos completen una tabla como la que sigue, de tal manera que verifiquen, conjeturen y generalicen para encontrar las fórmulas tanto del perímetro como del área del copo de nieve en función del lado L del triángulo equilátero original (**Función exponencial-Radicales**):

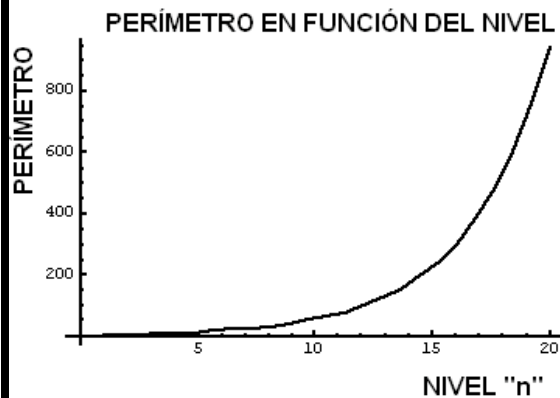
NIVEL: (n)	n = 0	n = 1	n = 2	n = 3	LEY (para n ≥ 1)
a) Cantidad de lados	3	3x4	3x4 ²	3x4 ³	3 × 4 ⁿ
b) Longitud de cada lado	L	L/3	L/3 ²	L/3 ³	L/3 ⁿ
c) Perímetro (a x b)	3 L	3 $\left(\frac{4}{3}\right)L$	3 $\left(\frac{4}{3}\right)^2 L$	3 $\left(\frac{4}{3}\right)^3 L$	3 $\left(\frac{4}{3}\right)^n L$
d) Cantidad de triangulitos que se agregan	-	3	3x4	3x4 ²	3x4 ⁽ⁿ⁻¹⁾
e) Área de cada triangulito	-	$\frac{1}{3^2} A_0$	$\frac{1}{3^4} A_0$	$\frac{1}{3^6} A_0$	$\frac{1}{3^{2n}} A_0$
f) Incremento área (d x e)	-	$\frac{1}{3} A_0$	$\frac{4}{3^3} A_0$	$\frac{4^2}{3^5} A_0$	$\frac{4^{(n-1)}}{3^{(2n-1)}} A_0$
g) Área total	A ₀	$\left(1 + \frac{1}{3}\right)A_0$	$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{4}{3^3}\right)A_0$	$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{4}{3^3}\right)\left(1 + \frac{4^2}{3^5}\right)A_0$	$A_0 \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{4^{(i-1)}}{3^{(2i-1)}}\right)$

NOTA: Llamamos A_0 al área del triángulo del nivel 0. Esa área es $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$

- Graficar.
- Justificar, analizando las fórmulas, a qué tiende cada una de las funciones.

El cálculo del área es más complejo que el del perímetro. Se puede optar por hacerlo o no según el nivel de los alumnos.

OBSERVACIONES SOBRE EL PERÍMETRO



El perímetro para un orden "n" es $3 \left(\frac{4}{3}\right)^n L$; como $4/3$ es mayor que 1, entonces el valor de la potencia $(4/3)^n$ va a ser un valor cada vez grande a medida que n sea cada vez mayor, pudiendo de este modo superar cualquier número que podamos imaginar. O sea que el perímetro para un n suficientemente grande es mayor que cualquier número que se nos

ocurra. Por ejemplo, si L fuese igual a 1 metro, para el nivel 10 el perímetro sería aproximadamente igual a 53,27 metros, para el nivel 100 el perímetro sería 9.353.947.230.623,83 metros (esto es mayor que la distancia de la Tierra al Sol) y para el nivel 1.000 el perímetro es mayor que la distancia que recorre la luz en 8 años (la luz va a una velocidad cercana a 300.000 kilómetros por segundo). En el gráfico se muestra el crecimiento del perímetro en función del nivel, cuando el nivel varía de 1 a 20.

OBSERVACIONES SOBRE EL ÁREA

Para el nivel 0 con $L = 1$ m, el área del triángulo vale $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 \cong 0,433 \text{ m}^2$.

(El símbolo " \cong " significa aproximadamente igual, y es el resultado de redondear el resultado a la cantidad de decimales que se desean)

Para el nivel 1 el área es $(1 + 1/3) A_0 \cong 0,577 \text{ m}^2$

Para el nivel 2 el área es $(1 + 1/3) \times (1 + 4/3^3) \times A_0 \cong 0,663 \text{ m}^2$

Para el nivel 3 el área es $(1 + 1/3) \times (1 + 4/3^3) \times (1 + 4^2/3^5) \times A_0 \cong 0,707 \text{ m}^2$

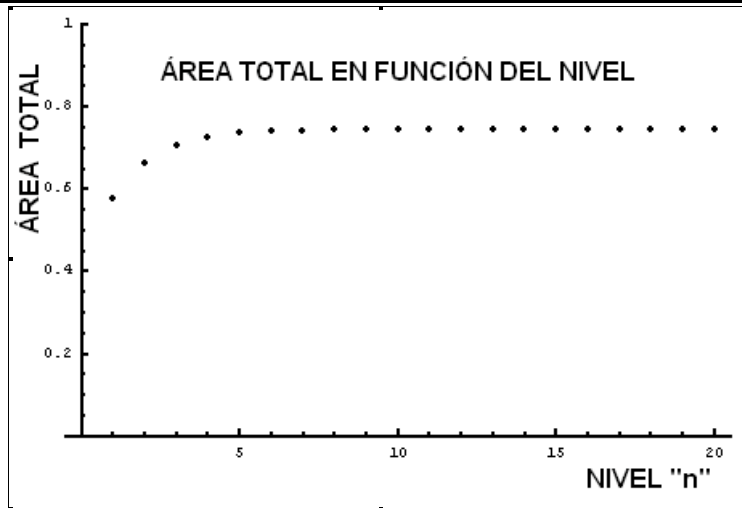
Para el nivel 4 el área es $(1 + 1/3) \times (1 + 4/3^3) \times (1 + 4^2/3^5) \times (1 + 4^3/3^7) \times A_0 \cong 0,727 \text{ m}^2$

Para el nivel 5 el área es $(1 + 1/3) \times (1 + 4/3^3) \times (1 + 4^2/3^5) \times (1 + 4^3/3^7) \times (1 + 4^4/3^9) \times A_0 \cong 0,737 \text{ m}^2$

Para el nivel 10 el área es $(1 + 1/3) \times (1 + 4/3^3) \times \dots \times (1 + 4^9/3^{19}) \times A_0 \cong 0,74422 \text{ m}^2$

Para el nivel 100 el área es $(1 + 1/3) \times (1 + 4/3^3) \times \dots \times (1 + 4^{99}/3^{199}) \times A_0 \cong 0,74435 \text{ m}^2$

Para el nivel 1000 el área es $(1 + 1/3) \times (1 + 4/3^3) \times \dots \times (1 + 4^{999}/3^{1999}) \times A_0 \cong 0,74435 \text{ m}^2$



Si aumentamos el nivel tanto como queramos el área tiende a un valor constante, y nunca llegará a $0,7444 \text{ m}^2$. Esto es una consecuencia de que el factor $(1 + 4^{(n-1)}/3^{(2^n - 1)})$ se acerca cada vez más a 1 cuando crece n. En el gráfico se observa que a partir del nivel 8 el valor del área prácticamente se mantiene constante.

En resumen, hemos obtenido un copo de nieve cuyo perímetro tiende a infinito pero que su área tiende a un valor finito.

!!!Gracias Oscar (Bressan) por tu colaboración y, como siempre, buena predisposición!!!